

PENENTUAN NILAI VOLATILITIES MELALUI MODEL BLACK SCHOLES DENGAN METODE NEWTON RAPHSON DAN STEEPEST DESCENT



Abstrak

Volatilitas merupakan instrument penting dalam opsi saham. Hal tersebut dikarenakan volatilitas memiliki hubungan yang kuat dengan harga opsi saham. Dengan menentukan nilai volatilitas di masa mendatang, maka kita dapat mengetahui harga opsi di waktu mendatang. Salah satu cara menentukan nilai volatilitas dengan menggunakan data volatilitas yang ada, disebut sebagai *implied volatility*. *Implied volatility* dapat ditentukan dengan menyamakan harga teoritis dengan harga pasar. Model *Black-Scholes* adalah salah satu model teoritis untuk menentukan harga opsi saham. Fungsi implisit dari harga teoritis dengan harga pasar, maka dapat ditentukan nilai volatilitas.

Untuk mengoptimalkan nilai volatilitas, maka digunakan metode *newton raphson dan steepest descent*. Metode *newton raphson* merupakan salah satu metode paling populer untuk penyelesaian persamaan. Metode *steepest descent* merupakan metode yang memerlukan informasi turunan – turunan dalam bentuk vektor gradient jacobian. Dalam metode ini juga memerlukan informasi turunan kedua dalam bentuk matrik hess.

Kata Kunci : *Implied Volatility, Model Black-Scholes, Newton Raphson, Steepest Descent*

Pendahuluan

Latar Belakang

Dalam era sekarang ini keuangan merupakan salah satu bidang yang berkembang sangat pesat. Banyak perusahaan maupun individu yang menghadapi masalah ini, sehingga tidak mengherankan apabila berbagai produk *derivatife* kemudian dibuat. Salah satu produk *derevatife* yang ada adalah opsi (option). *Derevatife* merupakan alat keuangan yang nilainya bergantung pada alat keuangan yang lebih mendasar lainnya. Contohnya adalah opsi yang selalu bergantung dari keadaan saham tersebut.

Opsi adalah kontrak yang disepakati untuk menjual atau membeli suatu aset. Opsi eropa. yang memberikan hak kepada holder untuk membeli atau menjual suatu aset dari writer dengan harga tertentu K pada waktu tertentu T . K dikenal sebagai *strike price*, T sebagai *maturity time(expire date)*, r suku bunga, dan σ volatilitas dari opsi saham. Hampir semua parameter tersebut dapat diperoleh dari data pasar, hanya nilai volatilitas yg tidak dapat diperoleh langsung. Padahal jika volatilitas dapat diketahui maka investor dapat menentukan harga opsi yang tepat dan memprediksi harga opsi suatu saham tertentu (1).

Volatilitas adalah ukuran ketidakpastian dari pergerakan harga saham

di waktu yang akan datang. Jika dilihat dari sudut pandang matematika, volatilitas merupakan simpangan baku dari perubahan return harga saham.

Cara lain untuk menaksir volatilitas yaitu dengan *implied volatility*. *Implied volatility* adalah penaksiran volatilitas yang dalam penentuannya menggunakan harga opsi yang diperoleh dengan cara menyamakan harga opsi teoritis (c) dengan harga opsi dipasar (c^*), yaitu $c(\sigma) = c^*$. Metode penyelesaian masalah optimisasi adalah metode *Newton Raphson*. Dengan memisalkan $F(\sigma) = c(\sigma) - c^*$, maka dapat dilihat bahwa volatilitas adalah akar dari persamaan $F(\sigma) = 0$.

Oleh karena itu, dalam tugas akhir ini akan dibahas mengenai volatilitas tersebut, khususnya bagaimana cara menaksir volatilitas suatu harga saham dengan menggunakan beberapa metode numerik. Metode yang digunakan untuk menaksir volatilitas dalam tugas akhir ini menggunakan metode *Newton Raphson* dan model *Black Scholes*.

Rumusan Masalah

Tugas akhir ini akan membahas penaksiran nilai volatilitas dari suatu harga saham. Masalah-masalah yang akan dilihat dalam tugas akhir ini adalah :

- Bagaimana mengetahui *implied volatility* dengan menggunakan rumus *Black-Scholes* ?
- Bagaimana metode numerik untuk menyelesaikan masalah optimisasi pencarian *Implied Volatility* dengan *Black-Scholes* ?
- Membandingkan kinerja menggunakan metode *newton-raphson* dan metode *steepest descent*

Tujuan

Tujuan dari pembuatan tugas akhir ini adalah:

- Mengetahui pencarian *Implied Volatility* dengan model *black-scholes*
- Mengetahui metode *Newton Raphson* dan *Steepest Descent* untuk pencarian *Implied Volatility* dengan menggunakan model *Black-Scholes*.
- Menentukan nilai terbaik antara metode *newton-raphson* dan metode *steepest descent*

Landasan Teori

Opsi

Opsi adalah suatu kontrak atau perjanjian antara dua pihak, dimana pihak pertama adalah sebagai pembeli yang memiliki *hak* bukan *kewajiban* untuk membeli atau menjual dari pihak kedua yaitu *penjual* terhadap suatu aset tertentu pada harga dan waktu yang telah ditetapkan.

Berdasarkan periode waktu penggunaannya, opsi dikelompokkan menjadi dua, yaitu opsi tipe amerika dan opsi tipe eropa. Opsi tipe amerika adalah opsi yang bisa digunakan sebelum waktu *experation date* atau pada waktu *experation date*. Dalam paper ini pembahasan akan difokuskan dalam model *Black Scholes* dan *Newton Raphson* dengan menggunakan asumsi opsi tipe eropa.

Volatilitas

Volatilitas merupakan sebuah variabel yang fundamental ketika menilai harga opsi. Volatilitas mempunyai hubungan yang positif dengan harga opsi. Bila volatilitas naik maka harga opsi juga akan ikut naik. Hal ini menunjukkan bahwa volatilitas dan harga opsi berbanding lurus. Dan volatilitas itu

sendiri sering dipergunakan untuk melihat turun dan naiknya saham. Tentunya perhitungan untuk volatilitas menjadi sangat penting. Apabila nilai volatilitas turun maka kemungkinan investor tidak akan melakukan eksekusi pada saham yang dimiliki, bahkan akan memutuskan untuk menahan saham dengan jangka waktu yang lebih lama. Karena dengan kondisi volatilitas yang turun, investor tidak mendapatkan nilai keuntungan jika melakukan eksekusi pada saham. Tentunya dengan keadaan seperti ini, investor harus melakukan strategi trading

yang tepat .

Volatilitas sering dianggap oleh berbagai pihak berbeda dengan risk. Dimana sebenarnya hampir sama bila dilihat dari perhitungannya. Perbedaan itu terletak pada pengungkapannya, tetapi sama-sama mempunyai perhitungan yang dikenal dengan varians. Adapun varians dihitung dengan rumusan sebagai berikut:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2}{n - 1}$$

Dimana

σ^2 = variansi

R_i = return dari harga saham pada waktu ke t

\bar{R} = rata-rata *return*

n = jumlah data saham

Model Black Scholes

Model *Black-Scholes* merupakan model yang digunakan untuk menentukan harga opsi yang telah banyak diterima oleh masyarakat keuangan. Model ini dikembangkan oleh Fischer Black dan Myron

tipe amerika, karena opsi amerika dapat dijalankan setiap saat sampai waktu *experation date*.

Model *Black-Scholes* menggunakan beberapa asumsi, yaitu opsi yang digunakan adalah opsi tipe Eropa, variansi harga saham bersifat konstan selama usia opsi dan diketahui secara pasti, proses acak dalam memperoleh harga saham, suku bunga bebas risiko, saham yang digunakan tidak memberikan dividen, dan tidak terdapat pajak dan biaya transaksi.[5]

$$C = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rt} \Phi(d_2)$$

(4)

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma \sqrt{t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma \sqrt{t}}$$

$$C = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rt} \Phi(d_2)$$

$$\Phi = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2} dz$$

(5)

$$\pi = 3.14$$

$$e = 2.7183$$

$$\mu = \dots$$

$$\sigma = \dots$$

$$d_1 = \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \frac{r + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma \sqrt{t}}$$

(6)

$$C = \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \frac{r + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma \sqrt{t}} = d_1 -$$

Scholes. Model ini penggunaannya terbatas karena hanya dapat digunakan pada penentuan harga opsi tipe eropa yang dijalankan pada waktu *experation date* saja, sedangkan model ini tidak berlaku untuk opsi

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = 0 \tag{7}$$

Dengan meminimumkan persamaan (4) maka di dapatkan nilai fungsi σ secara implisit.

Untuk mendapatkan *Implied Volatility*.

$$C(\sigma) = C^* - C(\sigma) = 0 \tag{8}$$

C^* = Nilai Opsi Pasar

$C(\omega)$ = Nilai Teoritis

Nilai teoritis adalah nilai opsi dari solusi *Black-Scholes*.

Dimana
$$C(\omega) = 0 = \omega \Phi(\omega) - \frac{1}{\sigma} \Phi(\omega) - C^* \tag{9}$$

Untuk mencapai $C(\omega) = 0$ maka persamaan (9) dapat diselesaikan dengan dua cara, pertama dengan pencarian akar $C(\omega) = 0$ menggunakan metode newton raphson, kedua dengan meminimumkan $C(\omega)$ dengan

metode *Steepest Descent*.

Metode Newton Raphson

Metode newton raphson adalah metode pendekatan yang menggunakan satu titik awal dan mendekatinya dengan memperhatikan slope atau gradien pada titik tersebut.

Titik pendekatan ke n+1 dituliskan sebagai berikut :

$$\omega_{n+1} = \omega_n - \frac{C(\omega_n)}{C'(\omega_n)} \tag{10}$$

Metode NR memiliki ciri – ciri : (1) memerlukan sebuah hampiran awal, dan (2) memerlukan perhitungan turunan fungsi $f(x)$ dalam setiap iterasi. Ciri kedua metode *newton raphson* tersebut berkaitan dengan fakta bahwa hampiran berikutnya diperoleh dengan cara menarik garis singgung kurva $y = f(x)$ pada titik yang mempunyai ansis hampiran sebelumnya hingga memotong sumbu x. Titik potong garis singgung tersebut dengan sumbu x merupakan hampiran berikutnya. Proses berlanjut

- Definisikan fungsi

$$C(\omega) = \omega \Phi(\omega) - \frac{1}{\sigma} \Phi(\omega) - C^*$$

- Tentukan toleransi error (e) dan iterasi maksimum (n)
- Tentukan nilai pendekatan awal x_0
- Hitung $F(x_0)$ dan $F'(x_0)$
- Untuk iterasi $i = 1$ s/d n atau $|C(\omega_i)| > e$

$$\omega_{i+1} = \omega_i -$$

$$\frac{C(\omega_i)}{C'(\omega_i)}$$

Hitung

$$C(\omega_{i+1}) \text{ dan } C'(\omega_{i+1})$$

Akar persamaan adalah nilai ω_{n+1} yang terakhir diperoleh.

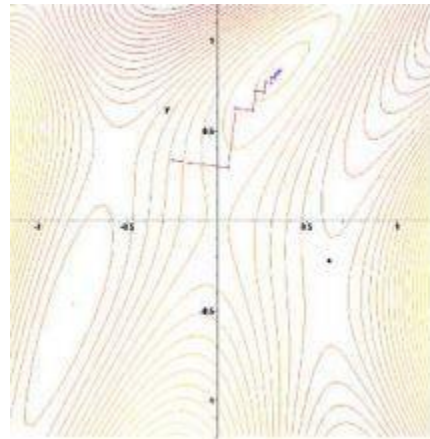
Metode Steepest Descent

Metode *steepest descent* adalah yang paling sederhana dari metode gradient. Bayangkan bahwa ada fungsi $F(x)$, yang dapat di definisikan dan terdiferensialkan dalam batas waktu yang ditentukan, sehingga arah itu berkurang secepat mungkin menjadi gradient negative $F(x)$. Untuk menemukan minimum local dari $F(x)$, metode *steepest descent*

digunakan, dimana ia menggunakan zig – zag seperti jalan titik sewenang – wenang ω dan sampai hampiran memenuhi syarat keakuratan yang ditentukan.[7]

Algoritma metode newton raphson :

secara bertahap bergeser ke bawah gradient, sampai menyatu ketitik yang sebenarnya dari minimum.



Gambar 1 :metode penurunan *steepest descent* minimum lokal di jalur

Langkah – langkah (untuk pemimuman) :

Selama $|\nabla f(x, y)| > \epsilon$ masih

berlaku

- I. Hitung $\nabla f(x, y)$
- II. $(x, y) = (x, y) - \alpha \nabla f(x, y)$
- III. $(x, y) = (x, y)$

Namun, metode ini juga memiliki

beberapa kelemahan besar: jika digunakan pada system skala buruk, itu akan berakhir melalui jumlah tak terbatas iterasi sebelum menemukan minimum, dan karena setiap langkah yang diambil selama iterasi yang sangat kecil, sehingga kecepatan konvergensi cukup lambat, meningkatkan konvergensi kecepatan, tetapi juga bisa mengakibatkan perkiraan dengan kesalahan besar. [13]

Rancangan Sistem

Diskripsi Sistem

Pada tugas akhir ini akan dirancang sebuah sistem untuk menyelesaikan masalah optimasi *implied volatility* dengan model *Black-Scholes*, metode *newton raphson* dan *steepest descent* sebagai algoritma dalam menemukan nilai volatilitas optimum.

Pengujian Dan Analisis

Implementasi

Dalam implementasi untuk menentukan *Implied Volatility* optimum dengan menggunakan model *Black Scholes* sebagai fungsi tujuan, algoritma *Newton Raphson* dan *Steepest Descent* untuk pencarian nilai volatilitas optimal dalam ruang pencarian.

Pengujian

Pada sub bab berikut akan dijelaskan tujuan pengujian, strategi pengujian dan analisis pengujian.

Tujuan Pengujian

Tujuan dari pengujian ini adalah mendapatkan nilai volatilitas awal yang dibandingkan, harga opsi pasar secara umum, dan volatilitas optimal oleh *Newton Raphson* dan *Steepest Descent*. Sehingga dapat digunakan untuk mendapatkan nilai

Implied Volatility yang optimum dari kedua metode tersebut dengan variabel yang terdapat pada data opsi saham.

Strategi Pengujian

Strategi pengujian sistem pada tugas akhir ini sebagai berikut :

1. Menentukan parameter yang digunakan untuk menentukan nilai *Implied Volatility*, yaitu data opsi saham.
2. Melakukan pencarian nilai optimal dengan algoritma *newton raphson* dan *steepest descent* pada fungsi tujuan, yaitu model *Black-Scholes*.
3. Analisis hasil volatilitas optimum yang dihasilkan algoritma *newton-raphson* dan *steepest descent*.

Hasil Analisis

Data yang digunakan adalah data dari paper yang di berikan oleh pembimbing untuk dicari nilai volatilitas paling optimum dengan menggunakan algoritma *newton raphson* dan *steepest descent*.

Newton Raphson

Berikut ini perhitungan untuk mencari nilai *Implied Volatility* dengan menggunakan *Newton Raphson* :

- $\sigma = 21$
- $K = 20$
- $r = 0.1$
- $\delta = 0.25$
- $\tau = 1.875$

Hasil algoritma *Newton Raphson* menunjukkan nilai volatilitas paling optimum berhenti di iterasi ke 7 setelah *running* program. Maka bisa kita dapat hasil *Volatility* paling optimum dari algoritma *Newton Raphson* adalah 0,2345122914.

Steepest Descent

Berikut ini perhitungan untuk mencari nilai *Implied Volatility* dengan menggunakan *Steepest Descent*.

- $\sigma = 21$
- $K = 20$
- $r = 0.1$
- $\delta = 0.25$
- $\tau = 1.875$

Hasil algoritma *Steepest Descent* pada menunjukkan nilai volatilitas paling optimum berhenti di iterasi ke 1565 setelah *running* program. Maka bisa kita dapat hasil *Volatility* paling optimum dari algoritma *Steepest Descent* adalah 0,234203651.

Nilai yang dihasilkan oleh model *Black Scholes*, algoritma *Newton Raphson* dan algoritma *Steepest Descent* adalah nilai volatilitas optimal untuk harga saham yang telah ditentukan.

Kesimpulan Dan Saran

Kesimpulan

Melihat hasil pengujian yang dilakukan dapat disimpulkan bahwa :

1. Model *Black Sholes* dapat digunakan untuk menebak *Implied Volatility* dengan menyamakan harga teoritis dengan harga opsi pasar dan algoritma *Newton Raphson* digunakan untuk mencari persamaan akar $f(x) = 0$ dan *Steepest descent* ununtuk meminimumkan $f(x)$.
2. Nilai volatilitas yang dihasilkan oleh algoritma *Newton Raphson* dan *Steepest Descent* dipengaruhi oleh nilai tebakan awal. Hasil pencarian implied volatility dengan newton raphson dan steepest descent memiliki jumlah iterasi yang berbeda, namun jumlah iterasi newton raphson lebih kecil di bandingkan dengan steepest descent. Dari waktu running program, rata – rata newton raphson 0.238540second dengan nilai volatilitas 0.2345 berhenti pada iterasi ke 7. Sedangkan rata – rata steepest descent 0.49657second dengan nilai

volatilitas 0.2342 berhenti pada iterasi ke 1565. Sehingga newton raphson lebih baik dibandingkan steepest descent.

Saran

Saran untuk tugas akhir ini :

1. Nilai volatilitas yang didapat dengan algoritma *Newton Raphson* dan *Steepest Descent* tidak menunjukkan ke satu nilai yang pasti. Sehingga dibutuhkan pengulangan *running* program untuk mendapatkan sekumpulan nilai volatilitas yang optimal. Tetapi dari kedua algoritma tersebut yang di dapatkan iterasinya berbeda, *Newton Raphson* lebih sedikit ketimbang *Steepest Descent*.

Daftar Pustaka

- [1] Higham, Desmond J., 2004. An Introduction to Financial Option Valuation. United Kingdom: Cambridge University Press.
- [2] Gerald, Curtis F. & Patrick O. Wheatly (1994). Applied Numerical Analysis. 5th edition. Addison-Wisley Pub. Co., Singapore
- [3] Lisa Apriana Dewi [M0108055], Frety Kurnita Sari [M0110029], dan Steffi Niaretho S. [M0110074], Department of Mathematics FMIPA UNS
- [4] Nicolas Christou, University of California, Los Angeles Department of Statistics, implied volatilities
- [5] Rully Charitas Indra Prahmana, Drs. Sumardi, M.Si, Penentuan Harga Opsi Untuk Model Black Scholes Menggunakan Metode Beda Hingga Crank Nicolson
- [6] Sebastian A. Bugge, Haakon J. Guttormsen, Peter Molnár*, Martin Ringdal, Norwegian Univeristy of Science and Technology, Trondheim, Norway
- [7] Sahid, Jurusan Pendidikan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negri Yogyakarta
- [8] Elementary Numerical Analysis An Algorithmic Approach
- [9] Feldman, Barry and Dhuv Roy. "Passive Options-Based Investment Strategies: The Case of the CBOE S&P 500 BuyWrite Index." *The Journal of Investing*, (Summer 2005).
- [10] Rochmad, Jurusan Matematika, FMIPA, 2013. Aplikasi Metode Newton Raphson Untuk Menghampiri Solusi Persamaan Non Linear
- [11] Dr. Ir. Bib Paruhum Silalahi, M.Kom, Metode Descent
- [12] Rustanto Rahardi, Penerapan Metode Steepest Descent dalam Menentukan Konsevasi Solusi Persamaan Kadomtsev-Petviashvii I Arah x atau y
- [13] Xu Wang, Department Of Engineering, University Of Tennessee, Knoxville, Method of Steepest Descent And Its Applications, 25 November 2008.